DOI: 10.5281/zenodo.15547337
Link: https://zenodo.org/records/15547337

PIK FORMULASI VA UNING TURLI XIL MASALALARNI YECHISHGA TADBIQLARI

Alladustova Iroda Ulugmuratovna, PhD
Toshkent amaliy fanlar universiteti,
"Boshlang'ich ta'lim nazariyasi va metodikasi" kafedrasi dotsenti,
E-mail: alladustova.iroda@mail.ru

Rabbimova Sevara Anvarjon qizi,
"Boshlang'ich ta'lim nazariyasi va metodikasi" kafedrasi o'qituvchisi,
E-mail: rabbimovasevara526@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu ishda diskret geometriya, matematik analiz, kombinatorika va muhandislikka oid turli masalalarning Pik formulasi orqali yechimlari berilgan. Bu formula yordamida uchlari panjara tugunlarida joylashgan ko'pburchaklarning xususiyatlari tahlil qilingan va aniqlangan, ularning yuzalari topilgan, Farey ketma-ketligi qo'shni hadlari orasidagi bog'lanish isbotlangan, ma'lum masshtabda berilgan maydon yuzalari aniqlangan, shaxmat donachalari bilan bog'liq ba'zi kombinatorik masalalarga yechim berilgan.*

Kalit so'zlar: *Pik formulasi, panjara, Farey ketma-ketligi, ko'pburchak.*

I. KIRISH

Matematikaning diskret geometriya sohasi uchlari panjara tugunlarida joylashgan ko'pburchaklar bilan bog'liq turli muammolarni o'rganadi. Bunday ko'pburchaklardan geometriyaning va kombinatorikaning muhim masalalarini hal qilishda ko'p foydalaniladi. Ayniqsa, ular kompyuter grafikasi, raqamli tasvirni qayta ishlash, qator algoritmlarda va matematik modellashtirishda keng qo'llaniladi.

Uchlari panjara tugunlarida joylashgan ko'pburchaklar yuzalarini aniqlash usullari diskret geometriya va sonlar nazariyasining eng muhim masalalaridan biri ularning hisoblanadi. Bu borada Pik formulasi ([1]) yoki teoremasining o'rni o'ziga xosdir. Teorema avstriyalik matematik Georg Aleksandr Pik tomonidan 1899-yilda taqdim etilgan bo'lib, shu turdagi maslalarni yechishning muhim usullaridan hisoblanadi. Pik formulasi oddiy panjara nuqtalari bo'ylab joylashgan ko'pburchaklarning yuzasini ichki va chegara nuqtalari soni orqali hisoblash imkonini beradi.

Pik formulasi va uning tadbiqlari bir qancha adabiyotlarda o'rganilgan. Jumladan, [2,3] adabiyotlarda ko'p burchakli shakllarning ekvivalentligi va Pik teoremasining qo'llanilishi haqida ma'lumotlar berilgan. [4,9] kitoblarda geometriyaning asosiy mavzulari qatorida Pik teoremasi ham tushuntirilgan. [5,6] kitoblar yosh o'quvchilar uchun mo'ljallangan bo'lib, unda Pik teoremasi oddiy misollar orqali keltirilgan. [8] kitobda Pik teoremasiga oid masalalar va ularning yechimlari, [10] kitobda esa stereometriya mavzulari bilan birga Pik teoremasining uch o'lchovli shakllarga tatbiqi ham ko'rib chiqilgan. [11,12] adabiyotlarda zamonaviy geometriyaning asosiy usullari va ularning amaliy qo'llanilishi, jumladan, Pik teoremasi haqida batafsil ma'lumotlar keltirilgan. Biz bu ishimizda uchlari panjara tugunlarida joylashgan ba'zi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblaymiz.

Shakllarning Geogebra grafik-dizayn dasturi orqali chizilgan grafiklarini keltirib o'tamiz.

II. PIK FORMULASI. UNING SODDA MISOLLARGA TADBIQI

Dastlab quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz:

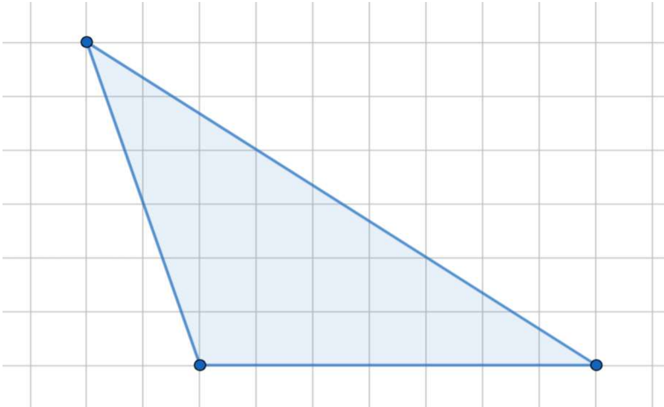
S – uchlari panjara tugunlarida joylashgan ko'pburchakning yuzi,

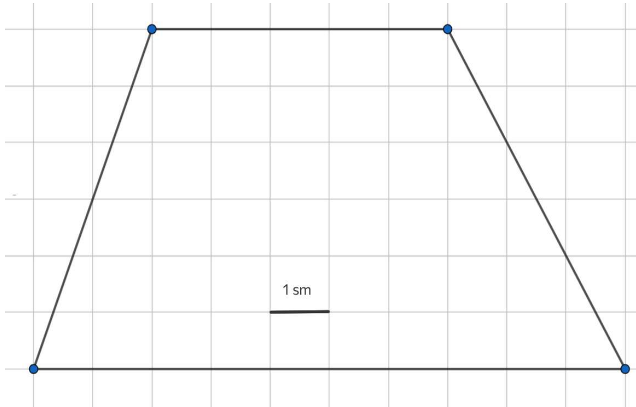
B – ko'pburchakning ichki qismida joylashgan panjara nuqtalari soni,

Γ – ko'pburchakning chegarasi bo'ylab joylashgan panjara nuqtalari soni.

1866-yilda Georg Pik tomonidan bu formulaning o'rinli ekanligi ko'rsatilgan. Dastlab Pik formulasining qo'llanilishini oddiy misollarda ko'rib chiqamiz.

1-misol. Katagining o'lchami $1sm \times 1sm$ bo'lgan panjarada uchburchak va trapetsiya tasvirlangan. Ularning yuzalarini sm^2 larda toping.



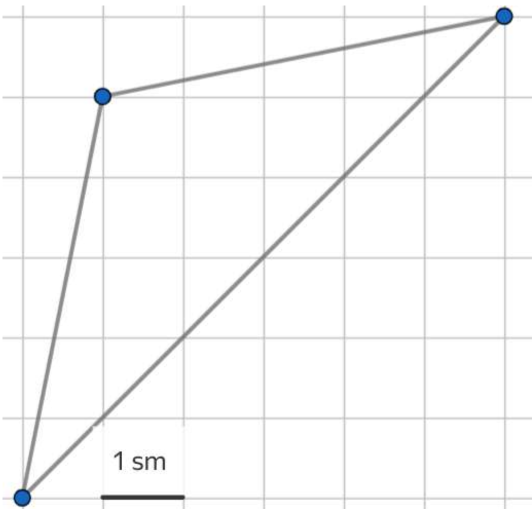


Chap tomonda tasvirlangan uchburchak uchun, $B_1 = 16$, $\Gamma_1 = 12$. O'ngdagi trapetsiya uchun esa $B_2 = 22$, $\Gamma_2 = 18$. Shuning uchun, Pik formulasiga asosan, ularning yuzalari S_1 va S_2 mos ravishda quyodagicha hisoblanadi:

$$S_1 = B_1 + \frac{\Gamma_1}{2} - 1 = 16 + \frac{12}{2} - 1 = 21\ (sm^2),$$

$$S_2 = B_2 + \frac{\Gamma_2}{2} - 1 = 22 + \frac{18}{2} - 1 = 30\ (sm^2).$$

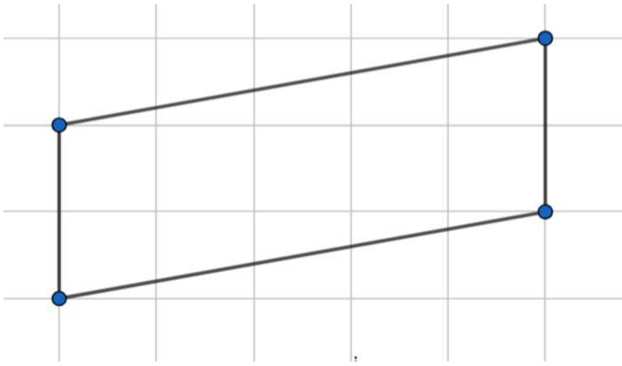
2-misol. Katagining o'lchami $1sm \times 1sm$ bo'lgan panjarada uchburchak tasvirlangan. Uning yuzasini sm^2 larda hisoblang.



Berilgan uchburchak yuzasini Pifagor teoremasini ikki marta qo‘llab, bu teng yonli uchburchakning balandligi va asosini topish orqali yoki kvadratning yuzasidan uchta uchburchak va bitta kichkina kvadratning yuzasini ayirib tashlash orqali hisoblash mumkin. Lekin, buni hisoblashning eng tez va oson yo‘li Pik formulasini qo‘llashdir.

$$\text{В} = 8, \Gamma = 6, \qquad S = 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 10\ (sm^2).$$

3-misol. Rasmda berilgan *ABCD* parallelogramning yuzasini toping.



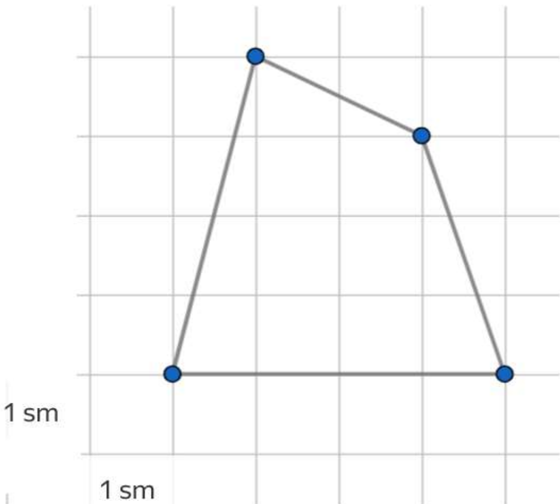
Chizmadan ko‘rish mumkinki, $\text{В} = 6$ va $\Gamma = 6$. Pik formulasiga ko‘ra

$$S = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1 = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8\ (sm^2)$$

Demak, berilgan parallelogramning yuzi 8 sm^2 ekan.

Pik formulasi yuqorida keltirilgan masalalardan tashqari amaliy geometriya masalalarini yechishga, borib bo‘lmaydigan maydonlarning yuzasini hisoblashga yordam beradi. Bunga misollar qaraymiz.

4-misol. Quyidagi rasmda katagining o‘lchami $1sm \times 1sm$ bo‘lgan panjarada $1sm: 200m$ masshtabda o‘rmon massivi tasvirlangan. Uning yuzasini m^2 larda toping.



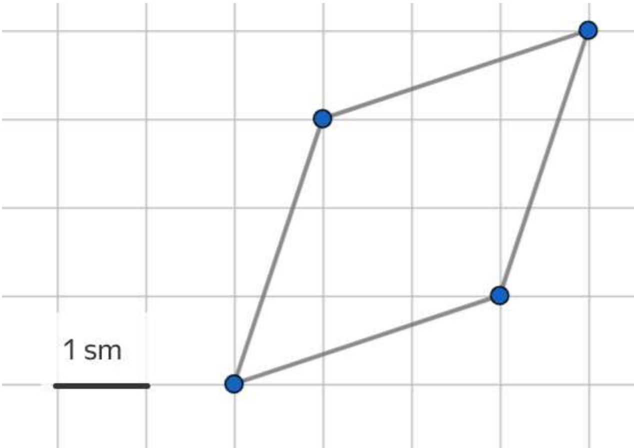
Ko‘rish mumkinki, bu to‘rtburchakning ichki qismida 8 ta va chegarasida 7 ta nuqta joylashgan, ya’ni $\text{В} = 8$ va $\Gamma = 7$. Demak, Pik formulasidan

$$S' = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1 = 8 + \frac{7}{2} - 1 = 10{,}5\ (sm^2)$$

Masala shartiga ko'ra, masschtab $1sm^2 : 200^2\, m^2$ ko'rinishida berilgan edi. Demak, yuza quyidagicha topiladi

$$S = 40000 \cdot S' = 40000 \cdot 10{,}5 = 420\,000\ (m^2)$$

5-misol. Quyida rasmda kataginining o'lchami $1sm \times 1sm$ bo'lgan panjarada trapetsiya tasvirlangan. $1sm$: $200m$ masshtabda berilgan bu maydonning yuzasini m^2 larda toping.



Ko'rish mumkinki, bu soha uchun В $= 7$ va Г $= 4$. Shuning uchun, uning yuzasi quyidagicha topiladi:

$$S' = 7 + \frac{4}{2} - 1 = 8\ (sm^2)$$

$1\, sm^2 : 200^2\, m^2$ masstabga ko'ra, soha yuzasi uchun quyidagini olamiz:

$$S = 40000 \cdot S' = 40000 \cdot 8 = 320\,000\ (m^2)$$

III. PIK FORMULASINING HAR XIL MASALALARNI YECHISHGA TADBIQI

Bu bo'limda biz geometriya va matematik analizning ba'zi masalalarini Pik formulasi yordamida o'rganamiz.

1-masala. F_n Farey ketma-ketligi deb $\frac{a}{b}$ ko'rnishidagi qisqarmas kasrlarning o'suvchi ketma-ketligiga aytiladi. Bunda $0 < a < b \leq n$. $\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ Farey ketma-ketligining qo'shni hadlari bo'lsin. U holda $|ad - bc| = 1$ ekanligini isbotlang.

Isbot. Har bir $\frac{a}{b}$ qisqarmas kasrga (a, b) koordinatali nuqtani mos qo'yamiz. Agar $\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ Farey ketma-ketligining qo'shni hadlari bo'lsa, u holda uchlari (0,0), (a, b) va (c, d) nuqtalarda bo'lgan uchburchak uchlardan farqli butunsonli nuqtalarni saqlamaydi. Haqiqatan, agar butun sonli (p, q) nuqta shu uchburchakda yotsa, u holda p va q sonlar n dan oshmaydi va $\frac{p}{q}$ kasr $\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ kasrlar orasida bo'ladi. Shuning uchun Pik formulasiga asosan bu uchburchakning yuzasi $\frac{1}{2}$ ga teng bo'ladi. Boshqa tomondan, uning yuzasi $\frac{1}{2} \cdot |ad - bc|$ ga teng. Demak, $|ad - bc| = 1$.

2-masala. ABC uchburchakning uchlari butun sonli panjaraning tugunlarida joylashgan va uning tomonlarida boshqa tugunlar yo'q, ichida esa faqat bitta O tugun bor. O nuqtaning ABC uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi ekanligini isbotlang.

Yechish. Pik formulasiga asosan $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COA} = \frac{1}{2}$. Demak, O - ABC uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi.

3-masala. Tomoni n ga teng bo'lgan kvadrat butun sonli panjaraning $(n+1)^2$ dan ko'p nuqtalarini qoplay olmasligini isbotlang.

Yechish. M – tomoni n ga teng bo'lgan kvadrat bilan qoplangan butun sonli panjara nuqtalarining qavariq qobig'i bo'lsin. Pik formulasiga asosan uning yuzasi

$$S = N_i + \frac{1}{2}N_e - 1$$

ga teng, bu yerda N_i - M ning ichidagi butun sonli nuqtalari soni, N_e esa M ning chegarasidagi butunsonli nuqtalar soni. Shuning uchun,

$$N_i + \frac{1}{2}N_e - 1 \le n^2.$$

M ning perimetri berilgan kvadratning perimetridan oshmaydi. Bundan tashqari, M ning chegarasidagi qo'shni butunsonli nuqtalar orasidagi masofa 1 dan kichik emas. Shuning uchun

$N_e \le 4n.$

Oxirgi ikkita tengsizlik, ya'ni $N_i + \frac{1}{2}N_e - 1 \le n^2$ va $N_e \le 4n$ munosabatlardan, talab etilgan

$$N_i + N_e \le (n+1)^2$$

tengsizlikni olamiz.

4-masala. Shaxmat qiroli 8×8 katakli doskada har bir katakdan bir marta yuradigan va oxirgi yurishda dastlabki katakka qaytib keladigan harakatini boshladi. Qirol yurgan kataklarning markazlarini tutashtiruvchi siniq chiziq o'z-o'zini kesmaydi.

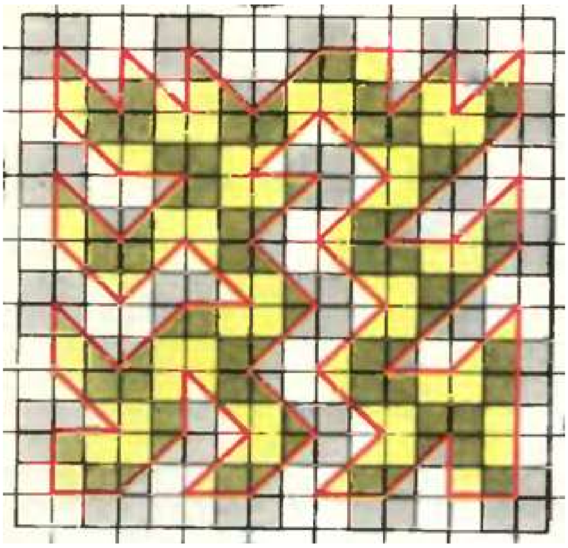
a) bu egri chiziq qanday eng katta uzunlikka ega bo'lishi mumkin?

b) bu egri chiziqni qanday yuza bilan chegaralash mumkin? (Kataklarning tomonlari 1 ga teng)

Yechish. b) Pik formulasidan tezda chegaralangan egri chiziqning yuzasi $\frac{64}{2} - 1 = 31$ ga tengligi kelib chiqadi(panjara tugunlari 64 ta kataklarning markazlari bo'lib xizmat qiladi; shart bo'yicha ularning barchasi ko'pburchakning chegarasida yotadi).

a) qismiga o'tamiz. Rasmda 64 ta yurishdan 36 tasida $\sqrt{2}$uzunlikka ega bo'lgan(diagonal bo'yicha yo'nalgan) masofa bosib o'tilgan qirolning yo'liga misol keltirilgan. Bunday yurishlar soni 36 tadan ortiq bo'la olmasligini isbotlaymiz.

1×1 kvadratni shunday quramizki, natijada qirolning yo'liga kiruvchi har bir $\sqrt{2}$ uzunlikdagi kesma bu kvadratning diagonali bo'lsin. Bu kvadratning yarmi qirol yo'lini chegaralovchi ko'pburchakdan tashqarida yotadi.



Lekin bunday yarimtaliklarning umumiy yuzasi $49 - 31 = 18$ dan oshmaydi. Ularning barchasi 7×7 kvadratdan chiqib ketmaydi. Demak, diagonal yurishlarning soni 36 dan oshmaydi. Natijada ushbu javoblarga ega bo'ldik: a) $28 + 36\sqrt{2}$ b) 31.

IV. ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Pick G. Geometrisches zur Zahlenlehre // Sitzungsberichte des Deutschen Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereines für Böhmen 'Lotos' in Prag. – 1899. – Vol. 19. – P. 311–319.
2. Grünbaum B. Convex Polytopes. – Berlin: Springer, 2003. – (Graduate Texts in Mathematics).
3. Болтянский В. Г. Эквивалентность и равносоставленность многогранников. – М.: Наука, 2006. – 272 с.
4. Федоров Д. В. Лекции по геометрии. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2010. – 420 с.
5. Киселёв А. П. Начальная геометрия. – М.: Просвещение, 2005. – 410 с.
6. Гельфанд И. М., Капанцев А. А. Геометрия для детей. – М.: МЦНМО, 2002. – 160 с.
7. Зив Б. Г., Мусатов М. И. Планиметрия. – М.: Просвещение, 2015. – 250 с.
8. Семенов К. Б. Задачи по геометрии с решениями. – М.: Физматлит, 2008. – 330 с.
9. Тихомиров В. М. История математики. – М.: Изд-во Московского университета, 2012. – 360 с.
10. Киселёв А. П. Геометрия. Стереометрия. – М.: Просвещение, 2007. – 375 с.
11. Атанасян Л. С. Геометрия. 7–9 классы. – М.: Просвещение, 2010. – 310 с.
12. Иванов И. И. Современная геометрия: Введение в методы и приложения. – М.: Юнити-Дана, 2018. – 456 с.