О ПРОБЛЕМЕ ИНВЕСТИРОВАНИИ И ХЕДЖИРОВАНИИ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Бабаджанов Шопулат Шомашрабович
ф.-м.ф.н., доцент кафедры высшей и прикладной математики, ТГЭУ
sh.babadjanov@mail.ru
+998977033711

Кеунимжаев Мухамедали Куанышбаевич
ассистент кафедры высшей и прикладной математики, ТГЭУ
Keunimjaeff@gmail.com

Аннотация: *в работе рассматривается некоторые аспекты вопросов инвестирования и хеджирования в финансовой математике.*

Ключевые слова: *опцион, инвестор, инвестиционный портфель, арбитраж, хедж.*

I. ВВЕДЕНИЕ

Среди основных структур, с которыми имеет дело теория финансов, рынки ценных бумаг занимают центральное место. Именно они представляют основной интерес для математической теории финансов. Акции и облигации являются первичными ценными бумагами, поскольку они определяются непосредственно через экономические факторы.

В 1900 году Л. Башелье предпринял попытку описать стоимость акций как случайный процесс. Он был первым, кто заметил, что при малых промежутках времени Δt приращения $\Delta S(t)$ цен акций ведут себя как $\sqrt{\Delta t}$. И это позволило через 65 лет П. Самуэльсону для описания эволюции стоимости акций $S(t)$ ввести так называемое геометрическое (он также писал «экономическое») броуновское движение

$$S(t) = S_0 e^{\mu t}\, e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}. \tag{1}$$

В отличие от акции и облигации вторичные (производные) ценные бумаги функционируют на базе уже имеющихся на бирже основных ценных бумаг. Рынок производных ценных бумаг является привлекательным из-за того, что требует существенно меньших начальных затрат и помогает страховать от потерь. Одной из наиболее распространенных производных ценных бумаг является опцион, или контракт с опционом, - ценная бумага, дающая ее обладателю право продать (купить) некоторую ценность (например, акции, валюту и т.д.) на оговариваемых условиях. По времени исполнения (погашения) опционы делятся на два основных типа: европейского типа, имеющие фиксированную дату погашения, и американского типа, которые могут быть представлены к исполнению в любой момент до фиксированной даты.

Участника финансового рынка, помещающего свободные капиталы в те или иные активы, мы называем инвестором, а совокупность принадлежащих ему активов - инвестиционным портфелем. Искусство инвестора состоит в умении правильно и динамично формировать свой портфель инвестиций (управлять портфелем): хранить актив, покупать и продавать его, давать займы.

Перераспределение портфеля служит для уменьшения риска той или иной сделки, например покупки или продажи опциона. В этом случае говорят о хеджировании, или защите своих инвестиций, а соответствующий динамический портфель называют хеджирующим портфелем. Существенное значение для инвестора имеет нахождение такой инвестиционной стратегии, которая дает прибыль при нулевых начальных затратах. Такие стратегии называются арбитражными.

II. АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ

В 1976 году вышла в свет работа С. Росса, в которой для описания равновесности состояния рынка использовались идеи арбитража. Утверждалось, в частности, что рынок, находящийся в равновесном состоянии, не должен допускать арбитражных ситуаций, то есть возможности извлечения прибыли без риска.

В 1973 году были опубликованы две работы, совершившие революцию в финансовых расчетах, связанных с опционами. Это статьи Ф. Блэка и М. Шоулса «Расчет цены опционов и обязательства корпораций» и Р. Мертона «Теория расчета рациональной пены опциона». В них было предложено обоснование справедливой цены опциона, приведена замечательная формула Блэка-Шоулса, развита теория оптимальных биржевых операций (хеджирующие стратегии), которые должен совершать продавец опциона, с тем, чтобы оговариваемые условиями контракта возможные платежи, зависящие от случайного состояния цен на рынке, были гарантированным образом выполнены.

Предполагая, что цены акций в любой момент времени либо однимаются вверх, либо опускаются вниз, Д. Кокс, Р. Росс и М. Рубинштейн предложили считать эти изменения дискретными и показали, что их модель имеет в пределе геометрическое броуновское движение, а полученная формула справедливой цены сходится к формуле Блэка-Шоулса.

Эти классические работы стали основанием для применения и развития методов современного стохастического анализа и теории финансов.

III. РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим предложенную Коксом, Россом и Рубинштейном дискретную модель (B,S)-рынка, состоящего из двух активов: банковского счета $B=B_n$ и акции $S=S_n$. Согласно этой модели, динамика банковского счета имеет вид $B_n=(1+r)B_{n-1}, \quad B_n>0$, где $r>0$- процентная ставка, а стоимость акции $S=S_n$ эволюционирует по закону

$$S_n=(1+\rho_n)S_{n-1}, \quad S_n>0, \tag{2}$$

где ρ_n –последовательность бернуллиевских случайных величин, принимающих два значения a и b, $-1<a<r<b$, с вероятностями p и $q=1-p$. Это условие обеспечивает, в частности, положительность величин S_n.

Пусть инвестор имеет начальный капитал $X_0 = x > 0$ и хочет увеличить его в будущем, располагая возможностями (B,S)-рынка. Он может поместить этот капитал $X_0 = x$ на банковский счет, и тогда его капитал в момент времени n будет равен $X_0(1+r)^n$. Значит, если инвестор хочет получить в некоторый момент времени N в будущем определенную сумму f_N, то его начальный капитал $X_0 = x$ должен быть равен $x = (1+r)^{-N} f_N$.

Он может вложить свой капитал $X_0 = x$ в акции. Это является, конечно, более рискованным делом, хотя может быть и привлекательным, если есть надежда на повышение цены акции. Тогда, заменяя значения случайной величины ρ_n ее математическим ожиданием, из (2) находим, что для получения в среднем суммы f_N начальный капитал $X_0 = x$ должен быть таким, что

$$x = \left(1 + (bp + aq)^{-N}\right) f_N.$$

Есть и третья возможность: поместить часть капитала на банковский счет, а часть в акции. Пусть B_0 - цена одной облигации, а S_0 - цена одной акции в момент времени $n = 0$ и инвестор имеет β_0 акций и γ_0 облигаций. Вообще говоря, числа β_0 и γ_0 могут быть и дробными, и отрицательными. Последнее соответствует взятию в долг. Начальный капитал инвестора можно записать в виде $X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$, а $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ образует портфель инвестора в момент времени $n = 0$.

Пусть к моменту времени $n = 1$, перед тем как будет объявлена новая цена акции S_1, инвестор преобразовал свой начальный портфель $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ в новый, основываясь лишь на начальной информации о значениях (B_0, S_0) и не допуская при этом ни притока дополнительного капитала со стороны (например, от дивидендов с акции), ни его оттока на сторону (например, на потребление). Перераспределенный таким образом портфель даст для капитала X_0 новое представление $X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0$. В момент времени $n = 1$ происходит объявление новых цен на рынке, то есть становится известным значение пары (B_1, S_1), поэтому начальный капитал X_0 инвестора, имеющего портфель $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$, превращается в величину $X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1$. Иначе говоря, приращение ΔX_1 капитала имеет вид $\Delta X_1 = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1$. Обобщая изложенное выше на произвольные моменты времени, имеем

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}, \qquad X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n,$$
$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n. \tag{3}$$

Суммарный капитал при этом представляется в виде

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k\right). \tag{4}$$

Смысл формулы (4) можно выразить так: формирование капитала $X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ осуществляется только за счет изменений $(\Delta B_n, \Delta S_n)$ в ценах облигаций и акций и без какого-либо его притока и оттока.

Заметим, что из формул (3) нетрудно получить, что

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n. \tag{5}$$

Последнее означает, что портфели $\pi_k = (\beta_k, \gamma_k)$, $k \le n$, таковы, что изменение капитала на банковском счете (то есть $B_{n-1}\Delta\beta_n$) может происходить только в результате соответствующего изменения капитала в акциях (то есть $S_{n-1}\Delta\gamma_n$) и наоборот.

Говорят, что портфель $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, $n \le N$, удовлетворяющий условию (5), образован на принципе самофинансирования, а саму стратегию $\pi = (\pi_n)$, $n \le N$, называют самофинансируемой.

Стратегия $\pi = (\pi_n)$, $n \le N$, называется хеджем, или хеджирующей стратегией (по отношению f_N), если с вероятностью единица $X_0^\pi = X_N^\pi \ge f_N$. Если $X_N^\pi = f_N$, говорят, что π является минимальным (x, f_N) хеджем.

Минимальное значение x, обозначаемое C_N, для которого возможно построение (минимального) хеджа π*, называется инвестиционной стоимостью (ценой), гарантирующей в момент времени N получение капитала, не меньшего f_N.

Величина C_N, представляет интерес в связи с проблемой справедливой цены (премии) опционов европейского типа.

IV. ОБСУЖДЕНИЕ

Обсудим более подробно стандартный опцион купли европейского типа.

На (B,S)-рынке индивидуум выпускает опцион купли, дающий право ее покупателю приобрести у него в некоторый фиксированный момент времени N в будущем акции по оговоренной цене K. Если в момент времени N ситуация на (B,S)-рынке окажется такой, что $S_N \ge N$, то владелец опциона покупает акции по цене K. После этого он может немедленно продать акции по номиналу S_N и получить прибыль $f_N = S_N - K$. Если же окажется, что $S_N < K$, то покупатель опциона не предъявляет его к исполнению, поскольку в этом случае он не получает никакой прибыли. Значит, в этом случае $f_N = max\{S_N - K, 0\}$.

Так как продавец опциона, получивший премию от покупателя, должен выполнить условия контракта, нетрудно понять, что справедливой стоимостью европейского опциона естественно называть именно величину C_N. Действительно, если продавец опциона получает премию C_N, то он, выступая как инвестор на (B,S) – рынке с начальным капиталом $X_0 = C_N$, сумеет организовать стратегию π*, которая обеспечит в момент времени N капитал $X_N^{\pi*} = f_N$. Если требуемая премия будет меньше инвестиционной стоимости C_N, то продавец опциона не сможет, вообще говоря, выполнить условия контракта, а назначение цены, строго большей C_N, например $C_N + C$, $C > 0$, приводит к арбитражной ситуации - получение продавцом дохода C без всякого риска, так как условия контракта были выполнимы и при стоимости C_N.

Расчеты стоимостей C_N, опционов европейского и американского типа, а также отыскание оптимальных хеджей (хеджирующих стратегий) являются одной из основных проблем теории опционов в финансовой математике.

Коксом, Россом и Рубинштейном впервые было получено, что для стандартного опциона купли с функцией выплаты $f_N = max\{S_N - K, 0\}$ справедливая стоимость C_N, задается формулой

$$C_N = S_0 B(k_0, N, \tilde{p}) - K(1+r)^{-N} B(k_0, N, p^*), \tag{6}$$

где

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \qquad \tilde{p} = \frac{(1+b)p^*}{1+r},$$

$$B(j,N;p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \qquad k_0 = 1 + \frac{\ln\left(\dfrac{K}{S_0(1+a)^N}\right)}{\ln\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)}.$$

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрим в заключение непрерывную модель рынка с банковским счетом $B = B(t)_{t\geq 0}$ и акцией $S = S(t)_{t\geq 0}$, причем $B_t = B_0 e^{n}$, $r \geq 0$- процентная ставка, а цена акции изменяется в соответствии с моделью «экономического» броуновского движения (1). Именно с этой моделью связана знаменитая формула Блэка-Шоулса: для стандартного опциона купли европейского типа с функцией выплаты $f_N = max\{S_N - K, 0\}$ справедливая стоимость C_N задается формулой

$$C_N = S_0 \Phi\left(d_+ - Ke^{rt}\Phi(d_-)\right), \qquad d_\pm = \left(\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\sigma^{-1} T^{-\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Здесь $\Phi(t)$ - функция нормального распределения, заданная в виде $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Несмотря на разницу во внешнем виде формул (6) и (7), их можно рассматривать с единой точки зрения. Оказывается, любой дискретный рынок можно исследовать на «непрерывном» временном интервале, на котором цены изменяются как ступенчатые случайные процессы. Кроме того, если шаг дискретности стремится к 0, формула (6) приближается к формуле Блэка-Шоулса

(7) в том же смысле, в котором справедливы приближенные равенства из локального и интегрального теорем Муавра-Лапласа.

VI. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и её применения. – 1994. – Т. 39, вып. 1. – С. 5–22.
2. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К теории расчётов опционов европейского и американского типов. I. Дискретное время // Теория вероятностей и её применения. – 1994. – Т. 39, вып. 1. – С. 23–79.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: Фазис, 1998. (English edition: Shiryaev A. N. Essentials of Stochastic Finance. – World Scientific, 1999.)
4. Мельников А. В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчёт производных ценных бумаг. – М.: Изд-во ТВП, 1997. – 130 с.
5. Bodie Z., Merton R. Finance. – Prentice-Hall, 2000.
6. Elliott R., Kopp P. E. Mathematics of Financial Markets. – Berlin: Springer-Verlag, 1998.
7. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance. – Berlin – New York: De Gruyter, 2002.
8. Hull J. Options, Futures and Other Derivative Securities. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1992.
9. Karatzas I. Lectures in Mathematical Finance. – Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.