DOI: 10.5281/zenodo.14973964
Link: https://zenodo.org/records/14973964

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ЧЛЕНОВ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА ПРИ СЛУЧАЙНОМ ОБЪЕМЕ ВЫБОРКИ

Мамуров Игамназар Нарбаевич
Канд.физ.мат. наук
доцент кафедры «Высшая и прикладная математика»
Ташкентского государственного экономического университета
e-mail: imamurov58@gmail.com
+998 99 619 48 71

Аннотация. *В статье рассматриваются предельные теоремы для последовательностей случайных величин (с.в.) со случайными индексами. Можно рассматривать распределение суммы случайного числа с.в. в условиях независимости числа слагаемых от самих слагаемых с.в. Такую схему случайного суммирования назовем «независимой схемой». В настоящее время имеется большое количество работ, относящихся к «независимой схеме». В работе исследованы последовательности с.в. со случайными индексами, при этом не предполагается условие независимости случайного индекса от самих исходных с.в. Такую схему условно будем называть «зависимой схемой».*

Следуя по теоремам, в которых предполагается существование предельного распределения для детерминированной последовательности и при соответствующих дополнительных условиях утверждается существование предельного распределения для последовательностей со случайным индексом, будем называть теоремами переноса.

Ключевые слова: *случайная величина, функция распределения, предельные теоремы, последовательности случайных величин (с.в.) со случайными индексами, теоремы переноса*

I. ВВЕДЕНИЕ

Приведем пример, в котором естественным образом появляется случайный объем выборки.

Пример.([6]). Изучение длительности безотказной работы дублированной системы.

Пусть требуется оценить надежность технической системы, состоящей из основного и резервного элементов с восстановлением. Резервный элемент находится в ненагруженном резерве, оба элемента обладают одинаковыми техническими характеристиками, которые полностью восстанавливаются в результате ремонта.

В момент времени 0 начинает работать основной элемент системы, а резервный включается в момент отказа основного. Переключение осуществляется мгновенно. В момент отказа элемент начинает восстанавливаться. Длительность ремонта случайна с распределением вероятностей $G(x)$. Длительность безотказной работы элемента также случайна и имеет $F(x)$ своей функцией распределения. После окончания ремонта элемент поступает в резерв. Отказ системы наступает в момент, когда оба элемента окажутся в состоянии отказа.

Обозначим через $\xi_1, \xi_2, ...,$ последовательные длительности безотказной работы элементов и через $\eta_1, \eta_2, ...,$ длительности их восстановления. Очевидно, что отказ наступит в момент $\tau = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_\nu$, где $\nu = \min(k \geq 2 : \xi_k < \eta_{k-1})$. Легко понять, что величина ν распределена по геометрическому закону

$$P\{\nu = k\} = (1-\alpha)\alpha^{k-1} \quad ,k = 2,3,..., \quad \text{где} \quad \alpha = P\{\xi_k > \eta_{k-1}\} = \int_0^\infty G(x)dF(x).$$

В теоретическом и прикладном отношениях особенно интересен случай, когда α мало. Мы предположим, что α зависит от целочисленного параметра n и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Это предположение можно трактовать как последовательное совершенствование системы ремонта. На n -ой стадии совершенствования ремонта $\alpha = \alpha_n$, $\nu = \nu_n$ и, значит, длительность безотказной работы системы равна $\tau = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{\nu_n}$.

Естественный интерес при этом представляет также изучение с.в. $\delta_{\nu_n} = \max(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{\nu_n})$.

Можно привести и другие примеры, в которых приходится иметь дело не с классической постановкой задачи, а с необходимостью оценки того или иного параметра по случайному числу наблюдений.

Было замечено, что в центральной предельной теореме (Ц.П.Т.) для сумм случайного числа с.в. в случае, когда число слагаемых может произвольным образом зависеть от самих слагаемых, предположение о сходимости по вероятности нормированного случайного индекса, вообще говоря, нельзя заменить на более слабое условие о сходимости по распределению [1]. Аналогичное замечание справедливо и для теорем, доказываемых в настоящей работе.

II. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В предисловии к монографии [7], указывается важность и необходимость исследований по теоремам переноса, в частности, для сумм случайного числа слагаемых. Во введении монографии [7] авторы отмечают: к настоящему моменту накопилось большое число работ по случайному суммированию, и с полной определенностью можно говорить о существовании соответствующей теории. Имеющиеся работы можно условно разделить на две группы. К одной из них мы относим результаты исследований, в которых непременным условием выступает независимость слагаемых от числа слагаемых в сумме. Другую группу составляют результаты, в которых такое предположение не делается. При анализе утверждений из второй группы прослеживается четкая взаимосвязь метода исследования и вида зависимости между числом слагаемых в сумме и самими слагаемыми в каждой отдельной задаче. В этой связи классификация результатов из второй группы представляется весьма затруднительной, в то время как в отношении результатов из первой группы она легко осуществима.

III. РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - последовательность независимых с.в. с общей ф.р. $F(x) = P(X_1 < x)$ и $\xi_1^{(n)} \le \xi_2^{(n)} \le \ldots \le \xi_n^{(n)}$ —вариационный ряд (в.р.), построенный по случайным величинам $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Отношение $\frac{k}{n}$ называется рангом члена $\xi_k^{(n)}$. Если при $n \to \infty, \frac{k}{n} \to \lambda,\ 0 \le \lambda \le 1$, то λ называется предельном рангом последовательности $\{\xi_n^k\}$. Члены $\xi_k^{(n)}$, для которых λ отличен от нуля и единицы называются центральными членами в.р., а члены $\xi_k^{(n)}$ для которых предельный ранг $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$ называются крайними членами в.р.

Определение. Последовательность членов в.р. с предельном рангом λ называется «устойчивой», если существует последовательность констант $A_k^{(n)}$, таких , что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\xi_k^{(n)} - A_k^{(n)}\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Нижеследующая теорема доказана в работе [10] .

<u>Теорема1</u><u>[10].</u> Если ранговой номер k членов $\xi_k^{(n)}$ остается постоянным при возрастании n, то для устойчивости $\xi_k^{(n)}$ необходимо и достаточно, чтобы при надлежаще выбранных константах $A_k^{(n)}$и любом $\varepsilon > 0$ выполнялись соотношения

$$nF\left(A_k^{(n)} + \varepsilon\right) \to +\infty, \tag{1}$$

$$nF\left(A_k^{(n)} - \varepsilon\right) \to 0, \quad (n \to \infty). \tag{1^1}$$

Для случая, когда $F(x) > 0$ для любого x рассматривают еще другое более широкое определение устойчивости.

Определение. Случайную последовательность $\xi_k^{(n)}$с постоянным ранговым номером kназывают относительно устойчивой, если существуют такие отрицательные константы $B_k^{(n)}$, что при любом $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\left\{B_k^{(n)}(1+\varepsilon) \le \xi_k^{(n)} \le B_k^{(n)}(1-\varepsilon)\right\} \to 1. \tag{2}$$

В [10] приводятся рассуждения, из которых следует , что соотношение (2) равносильно двум следующим:

$$nF\left(B_k^{(n)}(1-\varepsilon)\right) \to +\infty\ , \tag{3}$$

$$nF\left(B_k^{(n)}(1+\varepsilon)\right) \to 0\,. \tag{3^1}$$

Пусть для $0 < \lambda < 1$ величины $\overline{a}_\lambda$ и $\underline{a}_\lambda$ определены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\overline{a}_\lambda &= \inf\,(x : F(x) > \lambda)\\ \underline{a}_\lambda &= \sup\,(x : F(x) < \lambda)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Очевидно, что $\overline{a}_\lambda \geq \underline{a}_\lambda$.

Следующая теорема отвечает на вопрос об условиях устойчивости центральных членов в.р.

Теорема 2[10]**.** Если при $n \to \infty$, $\dfrac{k}{n} \to \lambda,\ 0 < \lambda < 1$ и $\overline{a}_\lambda = \underline{a}_\lambda = a_\lambda$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\xi_k^{(n)} - a_\lambda\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Более того, при $n \to \infty$ $P\left\{\xi_k^{(n)} \to a_\lambda\right\} = 1$.

Если $\underline{a}_\lambda < \overline{a}_\lambda$, то в этом случае $F\left(\underline{a}_\lambda + 0\right) = F\left(\overline{a}_\lambda - 0\right)$ и следовательно, интервал $\left(\underline{a}_\lambda; \overline{a}_\lambda\right)$ будет интервалом постоянства ф.р. $F(x)$. В данном случае последовательность центральных членов, вообще говоря, не устойчива.

Обозначим через $S_n(x)$ частоту положительных исходов в n независимых испытаниях относительно событий $\{X_1\}, \{X_2\}, \dots, \{X_n\}$. Тогда ясно ,что

$S_n(x) = I(X_1 < x) + I(X_2 < x) + \ldots + I(X_n < x)$, где $I(A) -$ индикатор события A.

В дальнейшем мы широко используем следующее простое, но очень важное соотношение :

$$\left\{\xi_k^{(n)} < x\right\} = \left\{S_n(x) \geq k\right\}, \qquad (5)$$

Так как для осуществления неравенства $\xi_k^{(n)} < x$ необходимо и достаточно, чтобы не менее k членам в исходной выборке $X_1, X_2, \dots, X_n$

были меньше чем x. Аналогично справедливо равенство

$$\left\{\xi_k^{(n)} \leq x\right\} = \left\{S_n(x+0) \geq k\right\}, \qquad (5^1)$$

где $S_n(x+0) -$ обозначает частоту ч.в.р., не превосходящих x.

Заметим, что, если $\Phi_{kn}(x) = P\left(\xi_k^{(n)} < x\right)$, $\overline{\Phi}_{kn}(x) -$ ф.р. k –члена в.р. с.в. $-X_1, -X_2, \dots, -X_n$ с ф.р. $\overline{F}(x) = 1 - F(-x)$ то справедливо соотношение

$$\Phi_{n-k+1,n}(x) = 1 - \overline{\Phi}_{kn}(x),$$

которое позволяет переносить результаты, найденные для $\xi_k^{(n)}$ на распределение $n-k+1$ - го члена $\xi_{n-k+1}^{(n)}$ и обратно.

Приведем полученные нами результаты посвящённые вопросам устойчивости последовательностей членов вариационного ряда (в.р.).

$$\xi_1^{(\nu_n)} \leq \xi_2^{(\nu_n)} \leq \ldots \leq \xi_{\nu_n}^{(\nu_n)},$$

построенного по случайному объему выборки $X_1, X_2, ..., X_{\nu_n}$ из генеральной совокупности с функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. Здесь и далее - $\{\nu_n\}$ последовательность положительных целочисленных с.в.

Во всех излагаемых результатах этого параграфа не предполагается независимость последовательностей с.в. $\{X_n\}$ и $\{\nu_n\}$.

Относительно $\{\nu_n\}$ предположим, что существует ф.р. $G(x)$ такая, что для любого x, являющейся точкой непрерывности $G(x)$, при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n} < x\right\} \to G(x), \qquad G(+0) = 0 \qquad (*)$$

Для крайних членов вариационного ряда $\xi_k^{(n)}$ с постоянным ранговым номером κ и для центральных членов доказываются следующие теоремы.

Теорема1. Пусть выполнено (*) и для $\xi_k^{(n)}$ с постоянным κ существует последовательность чисел $A_k^{(n)}$ такая, что при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\xi_k^{(n)} - A_k^{(n)}\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\xi_k^{(\nu_n)} - A_k^{(n)}\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Теорема 2. Пусть имеет место (*) и для $\xi_k^{(n)}$ с постоянным рангом κ существует последовательность чисел $B_k^{(n)}$ такая, что при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_k^{(n)}}{B_k^{(n)}} - 1\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_k^{(\nu_n)}}{B_k^{(n)}} - 1\right| < \varepsilon\right\} \to 1, \quad (n \to \infty).$$

Замечание. Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 можно сформулировать и для правых членов $\xi_{\nu_n-k+1}^{(\nu_n)}$ с постоянным ранговым номером κ.

Теорема 3. Пусть для последовательности $\xi_{k(n)}^{(n)}$ при $n \to \infty$, $\frac{k(n)}{n} \to \lambda,\ 0 < \lambda < 1,\ \underline{a}_\lambda = \overline{a}_\lambda = a_\lambda$ и для $\{\nu_n\}$ выполнено условие (*). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\xi_{k(\nu_n)}^{(\nu_n)}-a_\lambda\right|<\varepsilon\right\}\to 1.$$

Доказательство теоремы 1.

Так как

$$P\left\{\left|\xi_k^{(\nu_n)}-A_k^{(n)}\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\xi_k^{(\nu_n)}<A_k^{(n)}+\varepsilon\right\}-P\left\{\xi_k^{(\nu_n)}\le A_k^{(n)}-\varepsilon\right\}$$

покажем, что для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$P\left\{\xi_k^{(\nu_n)}<A_k^{(n)}+\varepsilon\right\}\to 1 \quad \text{и} \quad P\left\{\xi_k^{(\nu_n)}\le A_k^{(n)}-\varepsilon\right\}\to 0.$$

С этой целью положим

$$\eta_{nj}=\frac{I\left(X_j<A_k^{(n)}+\varepsilon\right)}{nF\left(A_k^{(n)}+\varepsilon\right)},\quad j=1,2,\dots,n \qquad и$$

$$\tau_{nj}=\frac{I\left(X_j\le A_k^{(n)}-\varepsilon\right)}{n},\qquad j=1,2,\dots,n.$$

Тогда мы имеем две последовательности серии независимых одинаково распределенных в каждой серии сл. вел. $\left\{\eta_{nj}\right\}_{j=1}^{n}$ и $\left\{\tau_{nj}\right\}_{j=1}^{n}$, $n=1,2,\dots$.

Применяя неравенство Чебышева, а также имея в виду соотношения из [10] нетрудно обнаружить, что

$$\eta_{n1}+\eta_{n2}+\dots+\eta_{nn}\xrightarrow{p}1,\quad (n\to\infty) \quad и$$

$$\tau_{n1}+\tau_{n2}+\dots+\tau_{nn}\xrightarrow{p}0,\quad (n\to\infty).$$

Пользуясь соотношением $\left\{\xi_k^{(n)}<x\right\}=\left\{S_n(x)\ge k\right\}$, имеем

$$P\left\{\xi_k^{(\nu_n)}<A_k^{(n)}+\varepsilon\right\}=P\left\{S_{\nu_n}(A_k^{(n)}+\varepsilon)\ge k\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{\nu_n}I(X_i<A_k^{(n)}+\varepsilon)}{nF(A_k^{(n)}+\varepsilon)}\ge\frac{k}{nF(A_k^{(n)}+\varepsilon)}\right\}=$$

$$=P\left\{\eta_{n1}+\eta_{n2}+\dots+\eta_{n\nu_n}\ge\frac{k}{nF(A_k^{(n)}+\varepsilon)}\right\}. \qquad 4.2.1)$$

Согласно (1) при $n\to\infty$

$$\frac{k}{nF(A_k^{(n)}+\varepsilon)}\to 0,\quad (k=const). \qquad (6)$$

Последовательности с.в. $\left\{\eta_{nj}\right\},\left\{\nu_n\right\}$ удовлетворяют условиям теоремы работы [1] с $k_n=n$ и $A(x)=G(x)$. Согласно этой теоремы, получим с учетом выше приведенного соотношения, что при $n\to\infty$

$$P\left\{\eta_{n1}+\eta_{n2}+\dots+\eta_{n\nu_n}\ge\frac{k}{nF(A_k^{(n)}+\varepsilon)}\right\}\to 1-G(0)=1$$

и значит при $n\to\infty$

$$P\left\{\xi_k^{(\nu_n)} < A_k^{(n)} + \varepsilon\right\} \to 1, \ (k = const). \qquad (7)$$

С другой стороны имеем, согласно [10]

$$P\left\{\xi_k^{(\nu_n)} \le A_k^{(n)} - \varepsilon\right\} = P\left\{S_{\nu_\nu}(A_k^{(n)} - \varepsilon + 0) \ge k\right\} =$$

$$= P\left\{S_{\nu_n}(A_k^{(n)} - \varepsilon + 0) > k - 1\right\} = P\left\{\tau_{n1} + \tau_{n2} + ... + \tau_{n\nu_n} > \frac{k-1}{n}\right\}.$$

Применяя результаты работы [1] к последовательности с.в. $\left\{\tau_{nj}\right\}_{j=1}^{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. заключаем, что при $n \to \infty$

$$P\left\{\xi_k^{(\nu_n)} \le A_k^{(n)} - \varepsilon\right\} \to 0. \qquad (8)$$

Соотношения (7) и (8) согласно равенству

$$P\left\{\left|\xi_k^{(\nu_n)} - A_k^{(n)}\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{\xi_k^{(\nu_n)} < A_k^{(n)} + \varepsilon\right\} - P\left\{\xi_k^{(\nu_n)} \le A_k^{(n)} - \varepsilon\right\}$$

завершают доказательство теоремы 1. ■ Аналогичные рассуждения используются и при доказательствах теорем 2 и 3.

IV. ОБСУЖДЕНИЯ

Более подробное исследование предельных распределений центральных членов вариационного ряда при детерминированном объеме выборки, по-видимому, начинается с работы [10] и в этой работе показана, что класс возможных предельных распределений для соответствующим образом центрированных и нормированных центральных ч.в.р. состоит из четырех различных типов распределений.

1. $$\Phi_\alpha^{(1)}(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{cx^\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad , \quad x > 0, \ c > 0; \end{cases}$$

2. $$\Phi_\alpha^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{-c|x|^\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad , \quad x \le 0, \\ 1 \quad , \quad x > 0, \quad c > 0; \end{cases}$$

3. $$\Phi_\alpha^{(3)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{-c_1|x|^\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad , x \le 0, c_1 > 0, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{0}^{c_2 x^\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \ x > 0, \ c_2 > 0; \end{cases}$$

4. $$\Phi_\alpha^{(4)}(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \le -1, \\ \dfrac{1}{2} \quad , \quad -1 < x \le 1, \\ 1 \quad , \quad x > 1. \end{cases}$$

Параметр α принимает любое положительное значение.

Все эти типы распределений имеют вид $\Phi(u(x))$, *где* $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$, а функции $u(x)$ имеет один из следующих видов:

$$u_1(x)=\begin{cases}-\infty & , \ x\le 0,\\ cx^{\alpha} & , \ x>0, \ c>0;\end{cases} \qquad u_2(x)=\begin{cases}-c|x|^{\alpha} & , \ x\le 0,\\ +\infty & , \ x>0;\end{cases}$$

$$u_3(x)=\begin{cases}-c_1|x|^{\alpha} & , x\le 0,\\ c_2x^{\alpha} & , x>0, \ c_1,c_2>0,\end{cases} \qquad u_4(x)=\begin{cases}-\infty & , \ x\le -1,\\ 0 & , \ -1<x\le 1,\\ +\infty & , \ x>1.\end{cases} \tag{9}$$

Пусть по-прежнему $\{\nu_n\}$ - последовательность положительных целочисленных с.в.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть при надлежащем выборе постоянных $a_n>0$, b_n при $n\to\infty$ выполнены:

$$P\left\{\frac{\xi_{k(n)}^{(n)}-b_n}{a_n}<x\right\}\to\Phi\left(u(x)\right) \quad \text{и}$$

$$\frac{\nu_n}{n}\to\nu_0, \text{ где } \nu_0>0 \text{ - с.в.}$$

Тогда при $n\to\infty$

$$P\left\{\frac{\xi_{k(\nu_n)}^{(\nu_n)}-b_n}{a_n}<x\right\}\to\int_0^{\infty}\Phi\left(u(x)\sqrt{y}\right)dP\{\nu_0<y\},$$ где функция $u(x)$ имеет один из возможных видов (9).

V. ВЫВОДЫ

Представляемая статья посвящена вопросам предельных распределений членов вариационного ряда при случайном объеме выборки в случае «зависимой схемы». В работе [7] указывается важность и необходимость исследований по теоремам переноса. К настоящему моменту накопилось большое число результатов по случайному суммированию, и с полной определенностью можно говорить о существовании соответствующей теории. Имеющиеся результаты можно условно разделить на две группы. К одной из них мы относим результаты исследований, в которых непременным условием выступает независимость слагаемых от числа слагаемых в сумме. Другую группу составляют результаты, в которых такое предположение не делается. При анализе утверждений из второй группы прослеживается четкая взаимосвязь метода исследования и вида зависимости между числом слагаемых в сумме и самими слагаемыми в каждой отдельной задаче. В этой связи классификация результатов из второй группы представляется весьма затруднительной, в то время как в отношении результатов из первой группы она легко осуществима.

Работы [1],[2],[5],[8]и[9] посвящены асимптотическим распределениям других членов вариационного ряда при случайном объеме выборки в случае «зависимой схемы». Здесь сначала устанавливается свойство R- перемешивания для изучаемых ч.в.р. и затем доказывается теорема переноса для этих членов.

VI. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азларов Т. А., Джамирзаев А. А. Об относительной устойчивости для сумм случайного числа случайных величин // Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1972. – № 2. – С. 7–14.

2. Азларов Т. А., Джамирзаев А. А., Мамуров И. Н. Предельные теоремы для распределений членов вариационного ряда при случайном объеме выборки // Узбекский математический журнал. – 1991. – № 1. – С. 3–13.

3. Азларов Т. А., Джамирзаев А. А., Мамуров И. Н. Асимптотические распределения членов вариационного ряда при случайном объеме выборки // VI Советско-Японский симпозиум по теории вероятностей и математической статистике (тезисы докладов). – Киев, 5–10 августа 1991. – С. 12.

4. Гнеденко Б. В., Фахим Г. Об одной теореме переноса // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 187, № 1. – С. 15–17.

5. Джамирзаев А. А., Мамуров И. Н. Теорема переноса для центральных членов вариационного ряда // Доклады АН УзССР. – 1988. – № 2. – С. 6–8.

6. Джамирзаев А. А., Мамуров И. Н. Теоремы переноса: монография. – Ташкент: Iqtisod-moliya, 2019. – 148 с.

7. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. – М.: МГУ, 1990. – 269 с.

8. Mamurov I. N. Asymptotic distribution of the central variation terms in the case of random sampling volume // Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry. – 2021. – V. 12, Issue 7, July. – P. 4626–4634. – URL: https://www.tojqi.net/index.php/journal/article/download/4500/3106/4952 (дата обращения: указать дату).

9. Mamurov I. N. On asymptotic distributions of members of variational series for a random sample size // AIP Conference Proceedings. – 11 March 2024. – DOI: https://doi.org/10.1063/5.0200828.

10. Смирнов Н. В. Предельные законы распределения для членов вариационного ряда // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. – 1949. – Т. 25.

11. Richter W. Ubertragung von Grenzaussagen für Folgen von zufälligen Größen aus Folgen mit zufälligen Indizes // Теория вероятностей и её применения. – 1965. – Т. 10, № 1. – С. 82–93.

12. Silvestrov D. S. Limit theorems randomly stopped stochastic processes. – Springer, 2004.