ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ НА ПЛОСКОСТИ

Хашимов Абдикомил Рисбекович
Ташкентский государственный университет, доцент, доктор физико-математических наук
+998 99 891 84 39
E-mail: abdukomil@yandex.ru

Курбанов Одилжон Тухтамурадович
Ташкентский государственный университет, доцент, кандидат физико-математических наук
+998 90 931 25 96
E-mail: odiljonkurbanov@gmail.com

Аннотация: *Работа посвящена построению и обоснованию фундаментального решения линейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка вида* $u_{xxx}+u_{yyy}-u_t=0$ *представляющего собой двумерное обобщение классического уравнения Эйри. Используется комбинированный метод исследования: преобразование Фурье по пространственным переменным* x, y *применяется для редукции исходного уравнения к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно образа Фурье. Доказано, что символ дифференциального оператора факторизуется в сумму одномерных слагаемых, вследствие чего двумерное фундаментальное решение представимо в виде произведения двух одномерных фундаментальных решений уравнения Эйри.*

Получена явная аналитическая формула фундаментального решения $G(x,y,t)=(3t)^{-2/3}\,Ai\left(-x(3t)^{-1/3}\right)Ai\left(-y(3t)^{-1/3}\right)$ *корректность, которой подтверждена прямой аналитической проверкой удовлетворения исходному уравнению. Результаты дополняют теорию линейных дисперсионных уравнений нечётного порядка и могут служить основой для построения решений неоднородных задач и задач Коши методом свёртки с найденным ядром.*

Ключевые слова: *фундаментальное решение, уравнение третьего порядка, функция Эйри, дисперсионные волны, автомодельные переменные, преобразование Фурье, линейные дисперсионные уравнения, уравнение Кортевега–де Фриза, группа растяжений, асимптотические оценки.*

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье проводится построение и обоснование фундаментального решения линейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

$$u_{xxx}+u_{yyy}-u_t=0 \qquad (1)$$

представляющего собой двумерное обобщение классического уравнения Эйри. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных нечётного порядка занимают особое место в теории дисперсионных уравнений математической физики. Простейшим представителем этого класса является одномерное уравнение Эйри

$$u_{xxx} - u_t = 0 \qquad (2)$$

возникающее как линеаризация уравнения Кортевега–де Фриза и описывающее распространение дисперсионных волн в средах без диссипации. Несмотря на формальное сходство с уравнением теплопроводности $u_{xx} - u_t = 0$ (оба уравнения обладают автомодельной структурой), уравнение Эйри принципиально отличается отсутствием свойства сглаживания знака и осциллирующим характером фундаментального решения, что приводит к качественно иной картине распространения возмущений.

Настоящее исследование рассматривает двумерное обобщение указанного уравнения (2) в котором оператор третьего порядка действует независимо по каждой из двух пространственных переменных. Подобная структура возникает при моделировании анизотропных дисперсионных процессов, в которых эффекты дисперсии в направлениях x и y статистически независимы и аддитивны, в отличие от изотропных моделей, где оператор дисперсии строится на основе лапласиана либо его степеней.

Актуальность построения фундаментального решения определяется тем, что оно является базовым элементом для решения задачи Коши методом свёртки, для построения функций Грина неоднородных задач, а также для качественного анализа скорости распространения и затухания возмущений. Несмотря на хорошую изученность одномерного уравнения Эйри, явные формулы для его прямых многомерных аддитивных обобщений систематически в литературе не приводятся в развёрнутом виде с полным аналитическим обоснованием, что определяет научную задачу настоящей работы.

Цель работы — построить в явном аналитическом виде фундаментальное решение уравнения (1), доказать его корректность методом прямой подстановки, установить автомодельную структуру решения и связанные с ней асимптотические свойства.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. Исследовать инвариантность уравнения относительно группы анизотропных растяжений.

2.Применить преобразование Фурье по пространственным переменным и установить факторизацию символа оператора.

3. Восстановить координатное представление решения через специальную функцию Эйри.

4. Выполнить аналитическую и численную верификацию полученной формулы.

5. Проанализировать асимптотическое поведение решения и его практические следствия для теории дисперсионных уравнений.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Теория фундаментальных решений линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами восходит к классическим работам Хёрмандера [1], который установил общие условия существования и регулярности фундаментального решения для произвольного линейного дифференциального оператора через анализ его символа в пространстве Фурье. Этот подход остаётся методологической основой большинства последующих исследований, включая настоящую работу, поскольку позволяет свести задачу построения фундаментального решения к анализу алгебраических свойств характеристического полинома оператора.

Для уравнения Эйри одномерного вида (2) фундаментальное решение в явной форме через специальную функцию Эйри было получено в рамках теории линейных дисперсионных уравнений и подробно систематизировано в работах, посвящённых обзору свойств функций Эйри и их приложений в математической физике и оптике [2]. В этой работе авторы показывают, что асимптотика функции Эйри при больших по модулю значениях аргумента имеет различный характер в зависимости от знака аргумента: экспоненциальное убывание для положительных значений и осциллирующее степенное затухание для отрицательных, что напрямую определяет качественные свойства решений уравнений Эйриевского типа.

Уравнение Кортевега–де Фриза $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, частным линеаризованным случаем которого является уравнение Эйри, исследовано в контексте теории интегрируемых систем и метода обратной задачи рассеяния в основополагающих работах Гарднера, Грина, Краскала и Миуры [3]. В этих исследованиях линейная часть оператора рассматривается как порождающая дисперсионное ядро, на основе которого строятся оценки убывания и дисперсионные неравенства типа Стрихарца, используемые впоследствии для доказательства глобальной разрешимости нелинейных задач.

Многомерные обобщения дисперсионных уравнений нечётного порядка рассматривались преимущественно в анизотропном контексте теории уравнений Кадомцева–Петвиашвили [5], где дисперсионный член по одной переменной дополняется эллиптическим оператором по другой. Принципиальное отличие рассматриваемого в настоящей работе уравнения состоит в том, что дисперсионные операторы третьего порядка действуют по обеим пространственным переменным аддитивно и симметрично, без эллиптической связи между ними, что соответствует иной физической интерпретации — независимому анизотропному распространению дисперсионных эффектов по двум направлениям.

Анализ существующих источников позволяет выявить два научных пробела. Во-первых, в опубликованных работах отсутствует прямое аналитическое построение фундаментального решения для аддитивного двумерного обобщения уравнения Эйри с явной верификацией через факторизацию символа оператора в пространстве Фурье. Во-вторых, отсутствует систематическое сопоставление автомодельной структуры такого решения со

структурой классических параболических уравнений (теплопроводности), что необходимо для корректной классификации скорости распространения дисперсионных возмущений в анизотропных средах.

Научная новизна настоящего исследования заключается в следующем:

1. Получена в явном замкнутом виде формула фундаментального решения уравнения (1) через произведение двух одномерных функций Эйри с детальным обоснованием показателей автомодельности;
2. Проведена строгая аналитическая верификация решения методом прямой подстановки с явным использованием дифференциального тождества Эйри $Ai''(z) = z \cdot Ai(z)$, $Ai''(z) = zAi(z)$, что отсутствует в обозримых источниках в применении к данному классу уравнений;
3. Установлена и обоснована анизотропная автомодельная группа растяжений $x \to \lambda x$, $y \to \lambda y$, $t \to \lambda^3 t$, определяющая показатель самоподобия решения $t^{-2/3}$.

МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование строится по следующей схеме

1. Установление группы симметрий уравнения и вывод вида автомодельной переменной.
2. Применение преобразования Фурье по переменным x, y для редукции уравнения в частных производных к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка по t относительно образа $\hat{U}(k,l,t)$.
3. Решение этого уравнения и анализ факторизации полученного символа.
4. Обратное преобразование Фурье с использованием известного интегрального представления функции Эйри для восстановления координатной формы решения.
5. Аналитическая проверка результата прямой подстановкой в исходное уравнение с использованием дифференциального тождества для функции Эйри.
6. Численная проверка условия нормировки решения.

АНАЛИЗ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Группа симметрий и автомодельная переменная

Уравнение $u_{xxx} + u_{yyy} - u_t = 0$ инвариантно относительно анизотропной группы растяжений

$$x \to \lambda x, \quad y \to \lambda y, \quad t \to \lambda^3 t, \quad u \to \lambda^{-2} u,$$

где $\lambda > 0$ — параметр группы. Непосредственная проверка показывает, что при таком преобразовании каждое слагаемое u_{xxx}, u_{yyy} и u_t приобретает один и тот же множитель λ^{-5}, что обеспечивает инвариантность уравнения. Показатель λ^{-2} при u выбран из условия сохранения интегрального инварианта

$\iint u(x,y,t)dxdy = const$, что является стандартным требованием при определении автомодельного фундаментального решения (по аналогии с уравнением теплопроводности, где роль такого инварианта играет полная тепловая энергия). Инвариантность относительно указанной группы влечёт существование автомодельного решения вида $u(x,y,t) = t^{-2/3} F(\xi, \eta)$, $\xi = xt^{-1/3}$, $\eta = yt^{-1/3}$.

Преобразование Фурье и факторизация символа

Применим преобразование Фурье по переменным x и y

$$\hat{U}(k,l,t) = \iint u(x,y,t) e^{-i(kx+ly)} dxdy \qquad (3)$$

Поскольку преобразование Фурье переводит дифференцирование $\partial / \partial x$ в умножение на ik (аналогично для y), исходное уравнение принимает вид линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка относительно t $\hat{U}_t = -i\left(k^3 + l^3\right)\hat{U}$, общее решение которого при единичном начальном условии $\hat{U}(k,l,0) = 1$ (соответствующем дельта-образной начальной плотности, определяющей фундаментальное решение) имеет вид

$$\hat{U}(k,l,t) = \exp(-ik^3 t)\exp(-il^3 t).$$

Ключевое наблюдение методологического характера состоит в том, что символ оператора $k^3 + l^3$ аддитивно разделяется по переменным k и l, вследствие чего экспонента факторизуется в произведение двух одномерных множителей, каждый из которых совпадает с образом Фурье фундаментального решения одномерного уравнения Эйри. Это формально доказывается тождеством $\exp\left(-i(k^3 + l^3)t\right) = \exp(-ik^3 t)\exp(-il^3 t)$.

Одномерное фундаментальное решение уравнения Эйри $g_{xxx} - g_t = 0$ с образом Фурье $\exp(-ik^3 t)$ задаётся известным интегральным представлением, сводящимся через стандартную замену переменной интегрирования к специальной функции Эйри

$$g(x,t) = (2\pi)^{-1} \int \exp(-ik^3 t + ikx)dk = (3t)^{-1/3} Ai\left(-x(3t)^{-1/3}\right), \quad t > 0 \qquad (4)$$

Показатели степени и знак аргумента в этой формуле не являются произвольными и определяются однозначно требованием точного удовлетворения исходному уравнению. В настоящей работе указанный вывод подтверждён прямым алгебраическим методом: для общего $g(x,t) = t^{-\alpha} Ai\left(cxt^{-\beta}\right)$ коэффициенты при функциях $Ai(\xi)$ и $Ai'(\xi)$ в выражении невязки $g_{xxx} - g_t$ приравнивались нулю как тождества по x и t, что дало однозначную систему $\beta = 1/3$, $c^3 = -\beta$, $\alpha = -c^3$, откуда $\alpha = 1/3$, $c = -3^{-1/3}$. Эта система получена с использованием дифференциального тождества Эйри $Ai''(z) = z \cdot Ai(z)$, которое определяет третью производную

$Ai'''(z) = Ai(z) + z \cdot Ai'(z)$ и тем самым делает возможным точное алгебраическое сокращение всех членов невязки.

Поскольку двумерный образ Фурье факторизуется в произведение одномерных, обратное преобразование Фурье по теореме о свёртке/произведении даёт двумерное фундаментальное решение в виде произведения двух копий одномерного решения g, взятых по переменным x и y соответственно

$$G(x,y,t) = g(x,t) \cdot g(y,t) = (3t)^{-2/3} Ai(-x(3t)^{-1/3}) Ai\left(-y(3t)^{-1/3}\right), \quad t > 0 \quad (5)$$

Полученная формула согласуется с автомодельным анзацем, выведенным из анализа группы симметрий: показатель $t^{-2/3}$ перед произведением функций Ai в точности совпадает с показателем $t^{-2/3}$, найденным из требования сохранения интегрального инварианта, а аргументы функций Ai пропорциональны автомодельным переменным ξ и η, что подтверждает внутреннюю непротиворечивость результата, полученного двумя независимыми методами — алгебраическим (Фурье) и групповым (теория симметрий).

Аналитическая верификация фундаментального решения

Корректность формулы (6) как решения уравнения $G_{xxx} + G_{yyy} - G_t = 0$ установлена методом прямой подстановки.

Дифференцирование произведения $g(x,t)g(y,t)$ даёт

$$G_{xxx} = g_{xxx}(x,t)g(y,t), \quad G_{yyy} = g(x,t)g_{yyy}(y,t),$$
$$G_t = g_t(x,t) \cdot g(y,t) + g(x,t) \cdot g_t(y,t).$$

Поскольку для одномерного множителя выполняется в точности $g_{xxx} = g_t$, сумма $G_{xxx} + G_{yyy}$ совпадает с G_t, что даёт

$$G_{xxx} + G_{yyy} - G_t \equiv 0 \quad (7)$$

тождественно для всех $x, y \in R$ и $t > 0$. Данный результат подтверждён независимо средствами компьютерной алгебры.

Численная проверка нормировки и количественные оценки

Для интерпретации построенного решения как фундаментального (то есть как предела дельта-образной начальной плотности) необходимо выполнение условия нормировки $\iint G(x,y,t)\,dxdy = 1$ для каждого $t > 0$. В силу факторизации $G = g(\cdot,t)g(\cdot,t)$ это условие сводится к одномерному равенству $\int g(x,t)\,dx = 1$, которое в свою очередь следует из классического точного результата для функции Эйри $\int Ai(s)\,ds = 1$ (интегрирование по всей действительной оси), полученного через предельный переход в интегральном представлении функции Эйри.

Численная проверка указанного интеграла методом квадратур с возрастающими пределами интегрирования (таблица 1) демонстрирует сходимость к значению 1 с осциллирующей погрешностью, характерной для интегралов от функций с медленным степенным, а не экспоненциальным

затуханием на отрицательной полуоси аргумента — это прямое количественное проявление известной асимметричной асимптотики функции Эйри.

Таблица 1.

Численная аппроксимация интеграла $\int Ai(s)ds$ на симметричных отрезках $[-L;L]$ (квадратурный метод адаптивного типа).

Предел интегрирования L	**Значение $\int Ai(s)ds$, $[-L;L]$**
50	1,019444
100	0,997559
200	0,998696
400	0,993985

Колебания значений около единицы вызваны осциллирующим характером функции Эйри при $s \to -\infty$ и не свидетельствуют о расходимости интеграла, который является условно сходящимся в классическом смысле.

Асимптотические свойства решения

Качественные свойства фундаментального решения определяются известной асимметричной асимптотикой функции Эйри: при $z \to \infty$ имеет место экспоненциальное затухание

$$Ai(z) \sim \left(2\sqrt{\pi}\,|z|^{1/4}\right)^{-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{2}{3}\right)|z|^{3/2}\right), \qquad (7)$$

тогда как при $z \to -\infty$ функция демонстрирует осциллирующее степенное затухание

$$Ai(z) \sim \left(\sqrt{\pi}\,|z|^{1/4}\right)^{-1} \cdot \sin\left(\left(\frac{2}{3}\right)|z|^{3/2} + \pi/4\right). \qquad (8)$$

Поскольку в построенном решении аргумент функции Эйри по каждой переменной имеет вид $-x(3t)^{-1/3}$, область $x>0$ соответствует положительному аргументу $z=-x(3t)^{-1/3}<0$, то есть осциллирующему режиму, тогда как область $x<0$ соответствует $z>0$ и экспоненциальному убыванию. Численная проверка значений функции Эйри подтверждает резкое количественное различие: при аргументе $z=10$ значение $Ai(10)\approx 1{,}1\cdot 10^{-10}$, тогда как $Ai(-10)\approx 4{,}0\cdot 10^{-2}$ — то есть отличие на девять порядков, что является прямым количественным подтверждением принципиальной физической асимметрии фундаментального решения относительно знака координаты.

Данная асимметрия имеет существенное содержательное значение: для уравнения (1) возмущение, локализованное в начальный момент времени в окрестности точки $(0,0)$, распространяется преимущественно в область $x,y<0$ в форме затухающих осцилляций, тогда как в область $x,y>0$ проникает экспоненциально малая часть возмущения. Это качественно отличает поведение

решений данного класса уравнений от параболических уравнений (типа теплопроводности), где фундаментальное решение является гауссовым, знакопостоянным и симметричным относительно начала координат.

Полученный результат позволяет сформулировать ряд содержательных выводов относительно структуры рассматриваемого класса уравнений. Прежде всего, факт точной факторизации фундаментального решения $G(x,y,t)=g(x,t)g(y,t)$ является прямым следствием алгебраической аддитивности символа оператора по переменным k и l в пространстве Фурье и не является специфическим свойством, требующим отдельного предположения: для любого линейного уравнения вида

$$u_t = L_1[u] + L_2[u], \qquad (9)$$

где L_1 действует только по x, а L_2 — только по y, фундаментальное решение всегда факторизуется в произведение одномерных решений соответствующих операторов. Это обобщает результат настоящей работы на более широкий класс анизотропных аддитивных уравнений и составляет методологический вклад исследования, выходящий за рамки конкретного частного случая.

Сопоставление с уравнением теплопроводности позволяет точнее определить место исследуемого уравнения в общей классификации эволюционных уравнений. Оба уравнения обладают автомодельной структурой и факторизуемым фундаментальным решением, однако порядок дисперсии (третий против второго) приводит к иному показателю автомодельности ($t^{-1/3}$ по каждой переменной против $t^{-1/2}$ для теплопроводности) и, что более существенно, к качественно иной форме решения: гауссова экспонента в случае теплопроводности заменяется знакопеременной осциллирующей функцией Эйри. Прямым следствием этого является отсутствие принципа максимума для уравнения (1): поскольку фундаментальное решение меняет знак (что следует из колебательного характера функции Эйри при отрицательном аргументе), решение задачи Коши с неотрицательной начальной функцией не обязано оставаться неотрицательным при $t>0$, в отличие от параболического случая.

Установленная асимметрия фундаментального решения относительно знака пространственных координат имеет значение для интерпретации направленности распространения дисперсионных возмущений: преимущественное распространение в область отрицательных значений координат с медленным степенным затуханием $\left(|x|^{-1/4}\right)$ контрастирует с быстрым экспоненциальным затуханием в противоположном направлении. Подобная асимметрия типична для линеаризованных дисперсионных уравнений типа Кортевега–де Фриза и согласуется с известным фактом, что солитонные и квазисолитонные структуры данного класса уравнений распространяются преимущественно в одном направлении вдоль характеристик.

Ограничение настоящего исследования состоит в том, что построенное решение относится исключительно к линейному уравнению; нелинейные

эффекты (например, дополнение оператора слагаемым типа $u \cdot u_x$, характерным для уравнения Кортевега–де Фриза) не рассматривались и требуют отдельного анализа методами теории интегрируемых систем либо энергетических оценок. Кроме того, представленная верификация ограничена случаем $t > 0$; поведение решения при $t \to 0^+$ в смысле слабой сходимости к дельта-функции Дирака доказано лишь со ссылкой на классический предельный переход в интегральном представлении функции Эйри и не сопровождалось отдельным строгим доказательством в настоящей работе, что определяет направление дальнейших исследований.

ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные в работе результаты вносят значительный вклад в развитие теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и, в частности, расширяют класс точно решаемых задач для многомерных дисперсионных систем.

Эффективность предложенного комбинированного метода базируется на сочетании классического преобразования Фурье по пространственным переменным и аналитического свойства факторизации символа дифференциального оператора.

Главным теоретическим открытием стало доказательство того, что двумерное фундаментальное решение представимо в виде произведения двух одномерных фундаментальных решений уравнения Эйри. Это демонстрирует глубокую преемственность между классической одномерной теорией и многомерными обобщениями, позволяя переносить уже известные свойства одномерного оператора на двумерный случай.

В работе получена явная аналитическая формула фундаментального решения. Найденное фундаментальное решение имеет не только самостоятельное теоретическое значение, но и открывает широкие возможности для дальнейших прикладных исследований.

Полученное ядро может служить основой для представления решений в виде интеграла свёртки для широкого класса правых частей и начальных условий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построено фундаментальное решение линейного дифференциального уравнения третьего порядка $u_{xxx} + u_{yyy} - u_t = 0$ в явном аналитическом виде (5).

Результат получен методом преобразования Фурье по пространственным переменным с последующим восстановлением координатного представления через автомодельную переменную и специальную функцию Эйри. Установлены следующие основные результаты: (1) показана инвариантность уравнения относительно анизотропной группы растяжений $x \to \lambda x$, $y \to \lambda y$, $t \to \lambda^3 t$, $u \to \lambda^{-2} u$, определяющая структуру автомодельного решения; (2) доказана

точная факторизация символа оператора в пространстве Фурье, влекущая факторизацию фундаментального решения в произведение одномерных решений уравнения Эйри; (2) выполнена прямая аналитическая верификация полученной формулы методом подстановки с использованием дифференциального тождества для функции Эйри, давшая точное тождественное удовлетворение уравнению; (3) численно подтверждено условие нормировки решения; (4) установлена существенная асимметрия асимптотического поведения решения относительно знака пространственных координат — экспоненциальное затухание при $x, y > 0$ против осциллирующего степенного затухания при $x, y < 0$.

Полученные результаты имеют теоретическое значение для классификации линейных дисперсионных уравнений нечётного порядка и могут быть использованы как ядро интегрального представления решения неоднородных задач и задачи Коши методом свёртки. Перспективным направлением дальнейших исследований является обобщение метода на класс уравнений вида (10) с операторами L_1, L_2 произвольного нечётного порядка, а также анализ влияния младших нелинейных возмущений на установленную структуру фундаментального решения методами теории возмущений и энергетических оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 440 p.
2. Vallée O., Soares M. Airy Functions and Applications to Physics. 2nd ed. London: Imperial College Press, 2010. 280 p.
3. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal, M. D., Miura, R. M. Method for Solving the Korteweg–de Vries Equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, No. 19. P. 1095–1097.
4. Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley-Interscience, 1974. 636 p.
5. Kadomtsev B. B., Petviashvili, V. I. On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media // Soviet Physics Doklady. 1970. Vol. 15. P. 539–541.
6. Linares F., Ponce G. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. 2nd ed. New York: Springer, 2015. 301 p.
7. Evans L. C. Partial Differential Equations. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. 749 p.
8. Olver P. J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993. 513 p.
9. Bleistein N., Handelsman, R. A. Asymptotic Expansions of Integrals. New York: Dover Publications, 1986. 425 p.
10. Tao T. Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis. Providence: American Mathematical Society, 2006. 373 p.